<u>Info</u> : Plus d'exos & listes pour l'examen blanc sur moodle (plus de détails semaine pro)

<u>Rappels</u> :

Suite définie par récurrence $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases} \qquad x_0 = a, \quad x_1 = f(x_0) = f(a), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(a)), \dots$$

si ℓ existe $\ell = f(\ell)$

<u>Exemple 3.56 (suite)</u> $\quad f(x) = m \cdot x + h$

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = m \cdot x_n + h \end{cases}$$

$$x_n = m^n \cdot a + h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} m^k$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} m^k = \frac{1-m^n}{1-m}$$

$$= \begin{cases} a + n \cdot h & \text{si } m = 1 \\ m^n \cdot a + \dfrac{1-m^n}{1-m} h & \text{si } m \neq 1 \end{cases}$$

À démontrer par récurrence

Cas 1 $|m| < 1$, $\lim_{n \to \infty} m^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{1-m} h$

On aurait aussi pu trouver ℓ en résolvant $\ell = f(\ell) = m \cdot \ell + h$

Cas 2 $|m| \geq 1$

(x_n) converge $\Leftrightarrow$ x_n est constante.

Exemple 3.57

1) Calculer quelques termes

$\hookrightarrow$ Conjecturer (x_n) croissante ou décroissante.

2) trouver les solutions de $\ell = f(\ell)$ $\to$ utiliser le point 1) pour conjecturer qui est la limite

3) Montrer par récurrence que $x_0 \leq x_n \leq \ell$ si $(x_n) \nearrow$

$\ell \leq x_n \leq x_0$ si $(x_n) \searrow$

4) Montrer que $\forall n$ $x_n \geq x_{n+1}$ ou $x_n \leq x_{n+1}$

(i) Soit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n^2 \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

1) $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = x_0^2 = \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, $x_2 = x_1^2 = \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{1}{4} + \left(\frac{1-4}{16}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}$ $\longrightarrow$ conjecture : $(x_n) \downarrow$

2) $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \ell^2 \Leftrightarrow \underbrace{\ell = 0}$ ou 1

$\hookrightarrow$ une suite décroissante qui commence à $\frac{1}{2}$ ne peut pas converger vers 1

3) Montrons que $\forall n$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ par récurrence

ℓ x_0

Init

Pour $n=0$, $x_0 = \frac{1}{2}$. On a bien $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ ✓

Pas de récurrence :

Supposons que $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$, montrons que $0 \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

On a $x_{n+1} = x_n^2 \geq 0$ et

$$x_{n+1} = x_n^2 \underset{0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}}{\leq} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

qui est le résultat voulu.

4) Montrons que $\forall n$, $x_{n+1} \leq x_n$

$g(y) = y(y-1)$

$g(y) \leq 0 \iff y \in [0,1]$

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n = x_n(x_n - 1) \leq 0 \quad \text{ok}$$

si $x_n \in [0,1]$

Ainsi, (x_n) converge et $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

" $\ell \leq x_{n+1} \leq x_n \leq x_0$ " $P(n)$

Chapitre 4 : Fonctions réelles.

§4.1 Bornes, croissance, parité et périodicité

Définition 4.1 (Bornes, croissance, périodicité)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que

(i) f est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in D$, $f(x) \leq M$. De plus, on note alors le suprémum de f

$$\sup_{x\in D} f(x) = \sup f(D) = \sup\{f(x) : x \in D\}$$

(ii) f est <u>minorée</u> si $\exists m \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in D$, $f(x) \geq m$. De plus, on note alors, $\inf_{x \in D} f(x) = \inf f(D) = \inf \{f(x) : x \in D\}$

(iii) f est <u>bornée</u> si elle est minorée et majorée ou de façon équivalente $\exists\, C \geq 0$ tq $\forall x \in D$, $|f(x)| \leq C$

(iv) f est <u>croissante</u> si $\forall x, y \in D$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

(v) f est <u>décroissante</u> si $\forall x, y \in D$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

(vi) f est <u>strictement croissante</u> si $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

(vii) f est <u>strictement décroissante</u> si $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

(viii) f est (<u>strictement</u>) <u>monotone</u> si f est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante

(ix) f est <u>périodique</u> si $\exists\, T > 0$ tq $\forall x \in D$ avec $x+T \in D$, on a $f(x+T) = f(x)$. On dit aussi que f est <u>T-périodique</u>.

Définition 4.3 (Fonction paire, fonction impaire)

(i) Un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}$ est <u>symétrique</u> (par rapport à 0) si $\forall x \in D$, $-x \in D$.

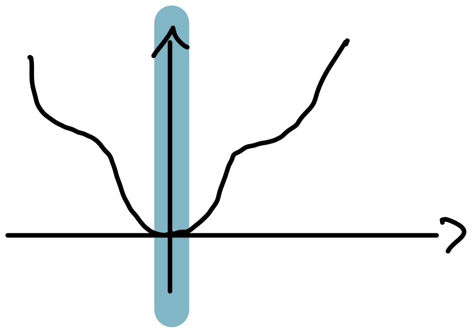
(ii) Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble symétrique et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que

(a) f est paire si $\forall x \in D$, $f(-x) = f(x)$

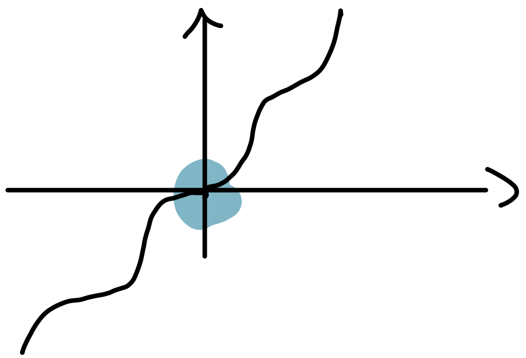
(b) f est impaire si $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$

Remarque 4.4

(i)



Sur le graphe, une fonction est paire si le graphe est symétrique par rapport à l'axe vertical



Sur le graphe, une fonction est impaire si en faisant une symétrie centrale de centre $(0,0)$, le graphe ne change pas.

(ii) Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ symétrique et $f : D \to \mathbb{R}$. Définissons $p, q : D \to \mathbb{R}$ par $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, $q(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

Alors, p est paire, q est impaire et $f(x) = p(x) + q(x)$.

On appelle p la partie paire de f et q la partie impaire de f.

Exemples 4.5 :

(i) les fonctions x, x^3, x^n avec n impair, $\sin(x)$, $\arcsin(x)$, $\tan(x)$, $\arctan(x)$, $\frac{1}{x}$ sont impaires.

Les fonctions x^2, x^4, x^n avec n pair, $\cos(x)$ sont paires.

Les fonctions e^x, $\log(x)$, $\arccos(x)$ sont ni paires ni impaires.

(ii) La partie paire de l'exponentielle est le cosinus hyperbolique

$$\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

La partie impaire de l'exponentielle est le sinus hyperbolique

$$\sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

Proposition 4.6 : Série 8

Proposition 4.7 :

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction T_f-périodique et $g : D \to \mathbb{R}$ une fonction T_g-périodique

$h : f(D) \to \mathbb{R}$. Alors,

(i) si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$, $f+g$ et $f \cdot g$ sont périodiques

(ii) $h \circ f$ est T_f-périodique.

<u>Exemple</u> 4.8

(ii) Considérons $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

La <u>caractéristique des rationnels</u>

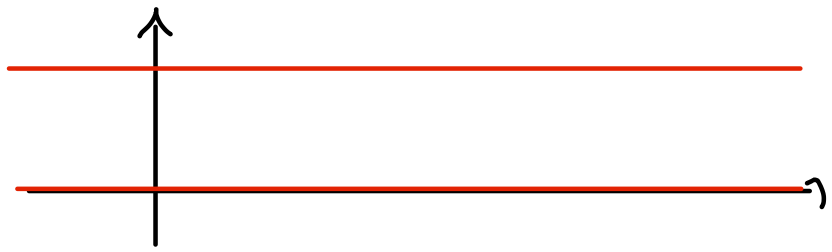
$\forall T > 0$, $T \in \mathbb{Q}$, on a que $\chi_{\mathbb{Q}}$ est T-périodique

En effet, si $x \in \mathbb{Q}$, $x+T \in \mathbb{Q}$ (rationnel + rationnel = rationnel)

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x+T) = 1 = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

Si $x \notin \mathbb{Q}$ alors, $x+T \notin \mathbb{Q}$ (sinon, $x = \underbrace{\underbrace{x+T}_{\mathbb{Q}} \; \underbrace{-T}_{\mathbb{Q}}}_{\mathbb{Q}}$)

Ainsi, $\chi_{\mathbb{Q}}(x+T) = 0 = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$



$\chi_{\mathbb{Q}}$ est périodique, mais n'a pas de "plus petite période"

§4.2 Limites de fonctions

$\lim_{x \to x_0} f(x)$, x qui se rapproche de x_0 et voir ce que $f(x)$ s'approche.

Définition 4.9 (Fonction définie au voisinage d'un point, limite de fonction)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$.

(i) On dit que f est <u>définie au voisinage de x_0</u> si

$$\exists \delta > 0 \text{ tq }]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \subseteq D$$

$\lim_{x \to -14} \sqrt{x}$ n'a pas de sens !

(ii) Supposons que f soit définie au voisinage de x_0 et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ℓ <u>est la limite de f quand x tend vers x_0</u> ou plus simplement, ℓ <u>est la limite de f en x_0</u> si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors, $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$

(iii) Supposons que f est définie au voisinage de x_0.

On dit que f admet une limite en x_0 si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tq

$\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$, i.e.

$\exists \ell \in \mathbb{R}$ tq $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$

$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$

Remarque 4.10

(i) On n'a pas besoin que $f(x_0)$ soit défini (en d'autres termes on n'a pas besoin que $x_0 \in D$) pour pouvoir parler de $\lim_{x \to x_0} f(x)$

Par exemple: $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

On peut parler de $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

(ii) Une façon équivalente d'écrire $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ est

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in D, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

En effet,

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

Exemples 4.11

(i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$, $x_0 = 2$.

Montrons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x = 2$.